Άσκηση 6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος Gram-Schmidt
↓

$$q^{(1)} = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r_{11} = \|q^{(1)}\| = \sqrt{4} = 2, \quad q^{(1)} = q^{(1)}/r_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$q^{(2)} = a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r_{12} = (q^{(1)}, q^{(2)}) = 4, \quad q^{(2)} = q^{(2)} - r_{12} q^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, το $\underline{r_{22} = \|q^{(2)}\| = 2} \Rightarrow q^{(2)} = q^{(2)}/r_{22} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Τέλος,

$$q^{(3)} = a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad r_{13} = (q^{(1)}, q^{(3)}) = 2, \quad q^{(3)} = q^{(3)} - r_{13} q^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Έτσι,

$$r_{23} = (q^{(2)}, q^{(3)}) = 4 \Rightarrow q^{(3)} = q^{(3)} - r_{23} q^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow q^{(3)} = \frac{q^{(3)}}{\underset{\|q_3\| = 2}{\underset{\shortparallel}{r_{33}}}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Άρα, ο πίνακας

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R=\begin{bmatrix} \overset{r_{11}}{2} & 4 & 2 \\ & 2 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b-Ax\| \Rightarrow Rx = Q^T b \overset{\text{πράξεις}}{\Longrightarrow} x^T=\left[1,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]$$

Τελευταίο κεφάλαιο:

Μέθοδος των Δυνάμεων:

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ τ/ω:
$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\dots\geq|\lambda_n|$, $\lambda_1\in\mathbb{R}^*$ και $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $i>1$ και $i\leq n$
Θεωρούμε την ακολουθία διανυσμάτων
$x^{(k)}=\frac{A^k\cdot x^{(0)}}{\|A^k\cdot x^{(0)}\|}$, $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ (και $\|x^{(0)}\|=1$)

Ν.δ.ο
η ακολουθία $x^{(k)}$ συγκλίνει στο ιδιοδιάνυσμα x_1 της ιδιοτιμής λ_1 του πίνακα A. $\|x_1\|=1$

Αποδ.
Έστω $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ με $\|x^{(0)}\|=1$ και x_i, $i=1,2,\dots,n$ τα ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα των λ_i με $\|x_i\|=1$, $i=1,2,\dots,n$. Τότε $x^{(0)}=\sum_{i=1}^n c_i x_i$ και θεωρούμε $c_1\neq 0$. Έτσι:

$$x^{(k)}=\frac{A^k\cdot x^{(0)}}{\|A^k\cdot x^{(0)}\|}=\frac{\sum_{i=1}^n c_i A^k x_i}{\|\sum c_i A^k x_i\|}=\frac{\sum c_i\lambda_i^k x_i}{\|\sum c_i\lambda_i^k x_i\|}=$$

διαιρ. με λ_1^k και παίρνω

$$\frac{\left(c_1x_1+\sum_{i=2}^n c_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right)\lambda_1^k}{|\lambda_1|^k\,\|c_1x_1+\sum_{i=2}^n c_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\|}$$

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{c_1x_1+\sum_2^n c_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)x_i}{\|\lambda_1\|^k\cdot\|c_1x_1+\sum_2^n c_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\|}$$ (+)

$\to$ αφού $\lambda_i < \lambda_1,\ i=1,2,\dots,n$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

1) $\lambda_1 > 0$, $\oplus = \dfrac{c_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \cancel{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}^{\to 0} x_i}{\|c_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \cancel{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}^{\to 0} x_i\|} = \dfrac{c_1 x_1}{\|c_1 x_1\|} = \dfrac{c_1}{|c_1|} x_1 = \mathrm{sign}(c_1)\cdot x_1$

Εαν $\mathrm{sing}(c_1) = -1$ τοτε θεωρουμε το $-x_1$ ως ιδιοδ. του λ_1.

2) $\lambda_1 < 0$, τοτε θεωρουμε τις ακολουθιες: $x^{(2l-1)}$, $x^{(2l)}$, $l=1,2,\dots$

$$\lim_{l\to\infty} x^{(2l-1)} = -\frac{c_1 x_1 \sum_{i=2}^{n} \cancel{\lim_{l\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{(2l-1)}}^{\to 0} \cdot x_i}{\|c_1 x_1 \cdot \sum_{i=2}^{n} c_i \cancel{\lim_{l\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{(2l-1)}}^{\to 0} \cdot x_i\|} = -\mathrm{sign}(c_1) x_1 \to x_1$$

όμοια

$$\lim_{l\to\infty} x^{(2l)} = \mathrm{sign}(c_1) x_1 \to x_1$$

Αν $\lambda_1 > 1$: $A^k \cdot x^{(0)} \to \lambda_1^k x_1$

Αλγοριθμικά: Υπολογιζουμε $y^{(k)} = A x^{(k-1)}$ και $x^{(k)} = y^{(k)} / \|y^{(k)}\|$

Θα το δειξουμε με τη μεθοδο της τελειας επαγωγης

Για $k=1$, $y^{(1)} = A x^{(0)}$, $x^{(1)} = \dfrac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|} = \dfrac{A x^{(0)}}{\|A x^{(0)}\|}$ ισχυει ο τυπος

Εστω ότι ισχυει για k δηλ.

$y^{(k)} = A x^{(k-1)}$ και $x^{(k)} = \dfrac{A^k x^{(0)}}{\|A^k \cdot x^{(0)}\|}$ και θδο $k+1$.

τοτε

$y^{(k+1)} = A x^{(k)}$ και $x^{(k+1)} = \dfrac{A x^{(k)}}{\|A x^{(k)}\|} =$

$$= \frac{A \cdot \frac{A^k \cdot x^{(0)}}{\|A^k \cdot x^{(0)}\|}}{\left\|A \frac{A^k \cdot x^{(0)}}{\|A^k \cdot x^{(0)}\|}\right\|} = \frac{\frac{A^{k+1} \cdot x^{(0)}}{\cancel{\|A^k x^{(0)}\|}}}{\left\|\frac{A^{k+1} \cdot x^{(0)}}{\cancel{\|A^k x^{(0)}\|}}\right\|} = \frac{A^{k+1} \cdot x^{(0)}}{\|A^{k+1} x^{(0)}\|}$$

Αλγόριθμος Μεθόδου δυνάμεων με $\|\cdot\|_2$

Δεδομένα $A \in R^{n,n}$, $x^{(0)} \in R^n$: $\|x^{(0)}\| = 1$, ε σφάλμα ανοχής

Για $k=1$ έως ότου υπάρξει σύγκλιση

$y^{(k)} = A x^{(k-1)}$

$x^{(k)} = y^{(k)} / \|y^{(k)}\|_2$

$\lambda^{(k-1)} = (x^{(k)})^T A x^{(k)}$

Τέλος 'για'

Αν x_1 ιδιοδ. της λ_1 : $\|x_1\|_2 = 1$

$x_1^T A x_1 = \lambda_1 x_1^T x_1 = \lambda_1$

$\lambda_1 = \dfrac{x_1^T A x_1}{x_1^T x_1}$ Πηλίκο Reley

Κριτήριο σύγκλισης: $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon \Rightarrow |\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| \leq \varepsilon$

Σχετικό σφάλμα: $\dfrac{|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}|}{|\lambda^{(k)}|} \leq \varepsilon$

$\lambda^{(k-1)}$ η προσέγγιση της λ_1, $x^{(k)}$ η προσέγγιση του x_1

Αλγόριθμος Μεθόδου δυνάμεων με $\|\cdot\|_\infty$

Δεδομένα: (τα ίδια με πάνω)

Εύρεση το i των $\|x_i^{(0)}\|_\infty = 1$

Για $k=1$ έως όπου υπάρξει σύγκλιση

$y^{(k)} = A x^{(k-1)}$

$x^{(k)} = y^{(k)} / \|y^{(k)}\|_\infty$

$\lambda^{(k-1)} = \dfrac{y_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}$

Εύρεση του i των $\|x_i^{(k)}\|_\infty = 1$

Τέλος 'για'

κανονικοποιημένο

$y^{(k)} \to \lambda_1 x_1$

πιο μετά

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Να βρεθεί η ιδιοτιμή και το ιδιοδιάνυσμα του $A \in R^{n,n}$ κοντά στον αριθμό σ. Αν λ ιδιοτιμή κοντά στο σ τότε λ−σ είναι η μικρότερη απόλυτα ιδιοτ. του $A - \sigma I$ ή ισοδύναμα $1/\lambda-\sigma$ είναι η μεγαλύτερη απόλυτα ιδιοτ. του $(A-\sigma I)^{-1}$ με το ίδιο ιδιοδιάνυσμα. Η Μέθοδος δυνάμεων τότε, για τον $(A-\sigma I)^{-1}$ βρίσκει την ιδιοτιμή απόλυτα μέγιστη με τιμή $\mu = \dfrac{1}{\lambda - \sigma} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{\mu} + \sigma$

Αλγόριθμος Αντίστροφων Δυνάμεων με $\|\cdot\|_\infty$

ίδιος με τον προηγούμενο αλγόριθμο (αλλά με μικρές αλλαγές).

Δεδομένα : όπως πριν $(+\sigma)$

Για $k=1$ έως όπου υπάρξει σύγκλιση

Λύση γραμ. συστ. $(A-\sigma I)y^{(k)} = x^{(k-1)}$

$x^{(k)} = y^{(k)} / \|y^{(k)}\|_\infty$

$\mu^{(k-1)} = y_1^{(k)} / x_1^{(k-1)}$

Εύρεση των $\|x_i^{(1)}\|_\infty = 1$

Τέλος Για

Αποτελέσματα τα ίδια

$$y^{(k)} = (A-\sigma I)^{-1} x^{(k-1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A-\sigma I) y^{(k)} = x^{(k-1)}$$

Άσκηση 11 (σελ 232) ΣΟΣ (θέμα 5ο πιθανόν).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \sigma = 1, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

επιλέγω ως προς τη $\|\cdot\|_\infty$ για ευκολία πράξεων

$$A - \sigma I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και θέλω $(A-\sigma I) y^{(k)} = x^{(k-1)}$

Εφαρμόζω την LU παραγοντοποίηση και παίρνω

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

Άρα έχω να λύσω το σύστημα

$$LU y^{(k)} = x^{(k-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} L z^{(k)} = x^{(k-1)} & \rightarrow (z^{(1)})^T = [0, 1, \frac{2}{5}] \\ U y^{(k)} = z^{(k)} & \rightarrow (y^{(1)})^T = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}] \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty} = \frac{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{1/2} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

Τότε, $\mu^{(0)} = y_1^{(1)} / x_1^{(0)} = 1/2$, $\lambda^{(0)} = \frac{1}{\mu^{(0)}} + 1 = 3 \leftarrow$ 1η προσέγγιση για τη $2^{η}$ προσέγγιση λύνουμε ξανά συστήματα και βρίσκουμε:

$$(z^{(2)})^T = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right] \quad \text{και}$$

$$(y^{(2)})^T = \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right]$$

Συνεπώς

$$\|y^{(2)}\|_\infty = \frac{3}{4}, \quad x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{\|y^{(2)}\|_\infty} = \left(\frac{5}{6}, 1, \frac{5}{6}\right)^T$$

Έτσι, $\mu^{(1)} = \dfrac{y_2^{(2)}}{x_2^{(1)}} = \dfrac{3}{4}$ και $\lambda^{(1)} = \dfrac{1}{\mu^{(1)}} + 1 = \dfrac{7}{3}$

για $3^{η}$ προσέγγιση ξαναλύνουμε συστήματα και βρίσκουμε

$$(z^{(3)})^T = \left(\frac{5}{6}, \frac{17}{12}, \frac{7}{5}\right)$$

$$(y^{(3)})^T = \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{7}{8}\right)$$

Συνεπώς

$$\|y^{(3)}\|_\infty = \frac{11}{12}, \quad x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{\|y^{(3)}\|_\infty} = \begin{bmatrix} \frac{21}{22} \\ 1 \\ \frac{21}{22} \end{bmatrix}$$

Έτσι, $\mu^{(2)} = \dfrac{11}{12}$, $\lambda^{(2)} = \dfrac{12}{11} + 1 = \dfrac{23}{11}$

το ιδιοδιάνυσμα $(1,1,1)$ και ιδιοτιμή 2

(ή τη μικρότερη απόλυτα ιδιοτιμή τότε $\sigma = 0$)